連続と離散
— 微分方程式の視点から —

齊藤 宣一 (東京大学大学院数理科学研究科)

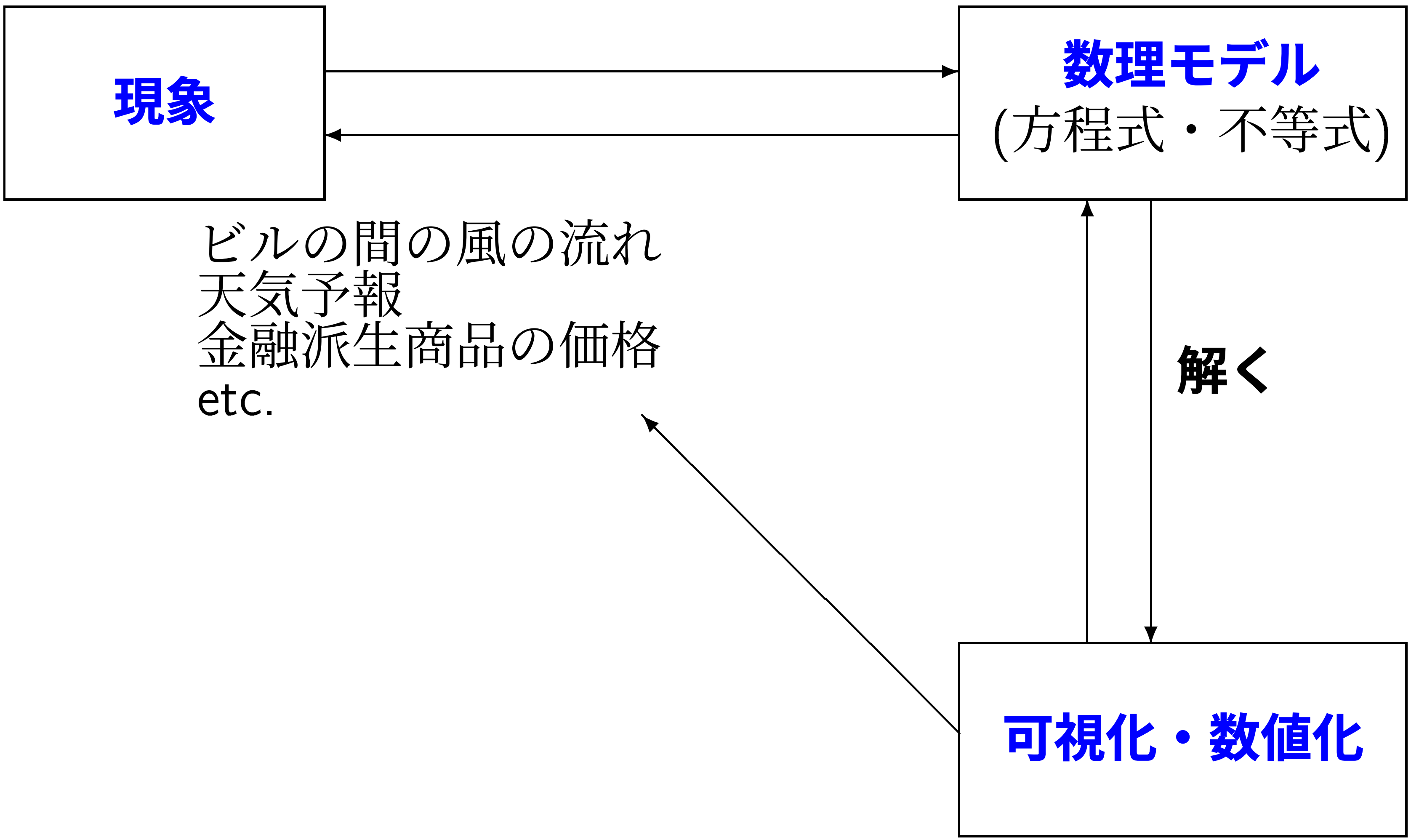
21 世紀 COE プログラム：科学技術への数学新展開拠点
数学公開講座「現象と数理」
2007 年 12 月 16 日　東京大学大学院数理科学研究科

はじめに

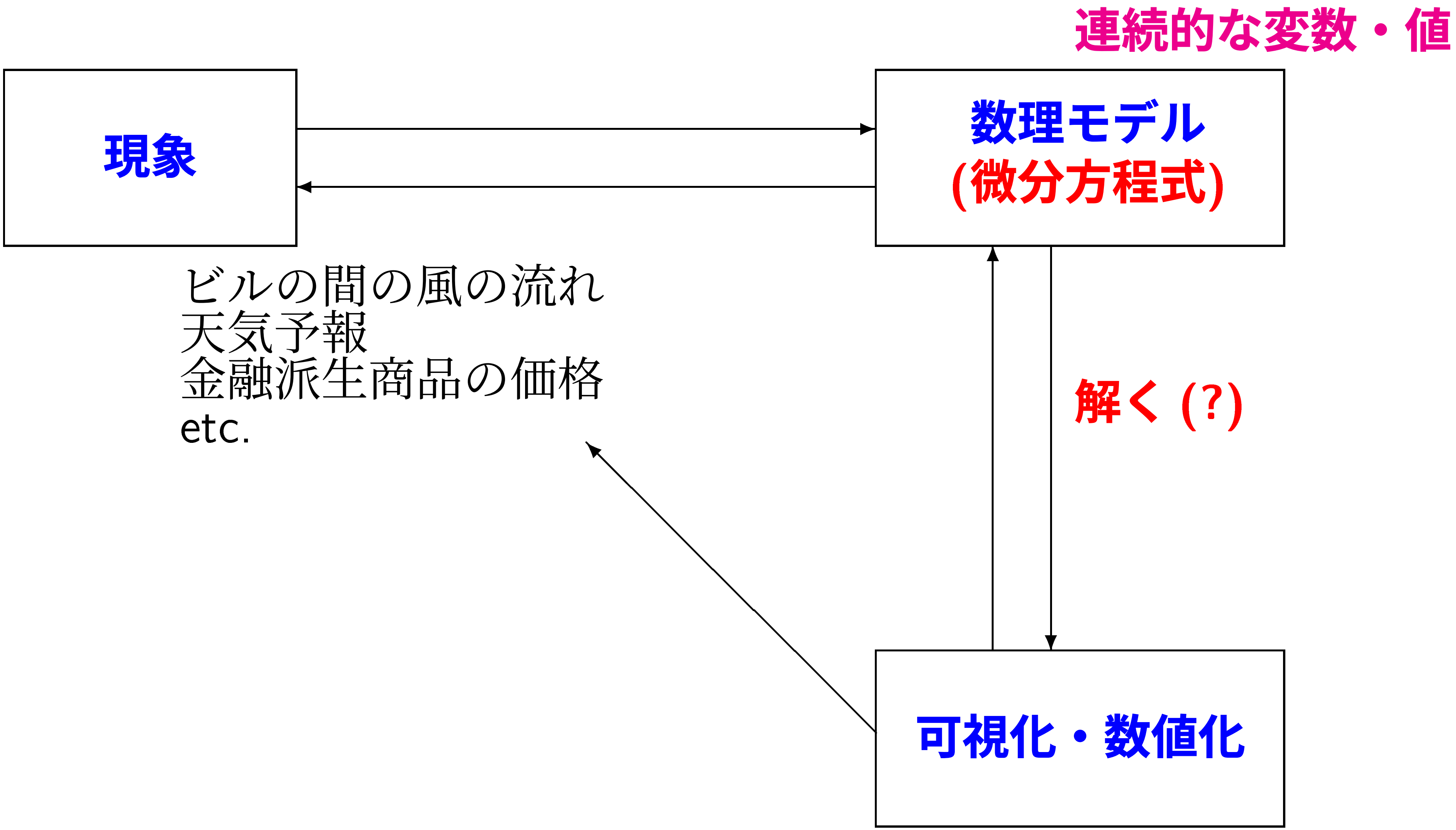
数理モデル

ビルの間の風の流れ
天気予報
金融派生商品の価格
etc.

数理モデル

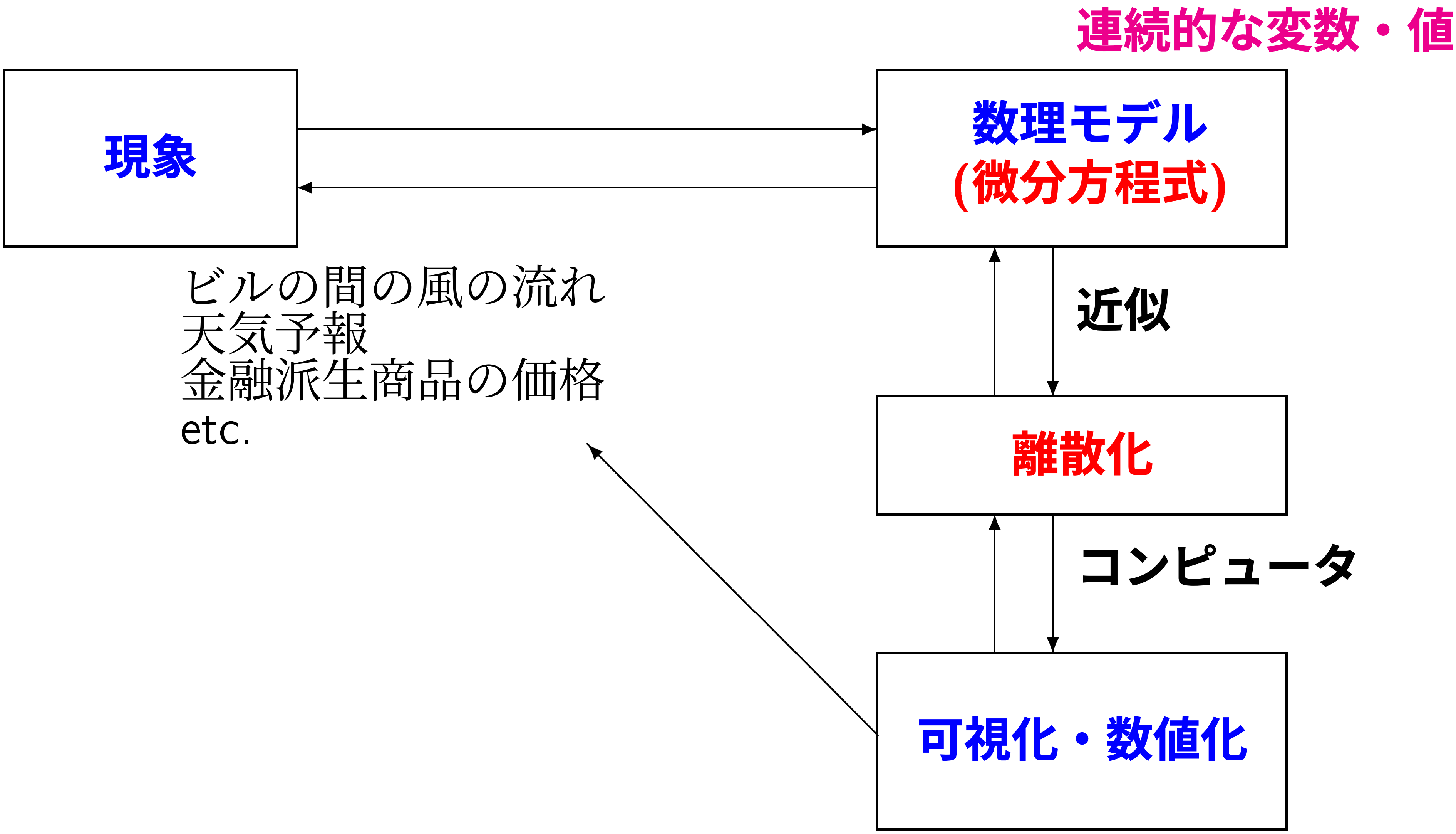


数理モデル



ビルの間の風の流れ
天気予報
金融派生商品の価格
etc.

数理モデル


連続的な変数・値
現象
数理モデル
(微分方程式)
ビルの間の風の流れ
天気予報
金融派生商品の価格
etc.
近似
離散化
コンピュータ
可視化・数値化

今日の予定

- □ 微分方程式の離散化に現れる問題 (issue) を 3 つ紹介したい：

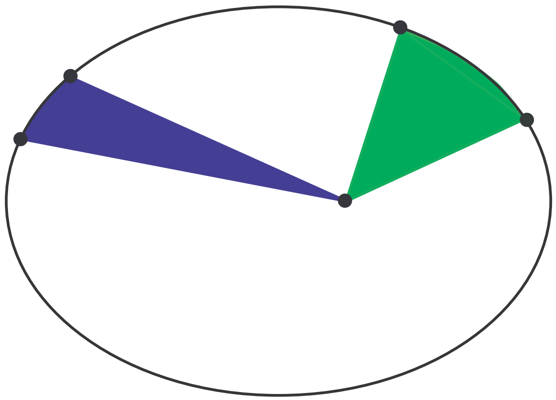
  1. 惑星運動の方程式
  2. 単振動
  3. ロジスティック方程式

- □ 「無限と連続」という古くて現代的な問題の一側面

惑星運動の方程式

ケプラーの法則

1. 惑星は太陽を焦点の 1 つとする楕円軌道上を運動する (1609)
2. 太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に掃く面積は一定である (1609)
3. 惑星の公転周期の自乗は，楕円軌道の長半径の三乗に比例する (1619)



- ヨハネス・ケプラー (Johannes Kepler，1571–1630)
- ティコ・ブラーエ (Tycho Brahe，1546–1601)

惑星運動の方程式

- M: 太陽の質量，m: 惑星の質量．($m/M \ll 1$ と仮定)
- 太陽の位置を位置ベクトルの基準 (原点)
- $(x(t),\ y(t))$: 時刻 t における惑星の位置ベクトル
- G: 万有引力定数
- $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$: 太陽と惑星の距離

$$\boxed{m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\frac{GMm}{r(t)^2}\cdot\frac{x(t)}{r(t)}, \qquad m\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -\frac{GMm}{r(t)^2}\cdot\frac{y(t)}{r(t)} \quad (1)}$$

- アイザック・ニュートン (Isaac Newton，1642–1727）

  自然哲学の数学的諸原理 (プリンキピア)　1687 年

惑星運動の方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\frac{GM}{r(t)^3}x(t), \qquad \frac{d^2}{dt^2}y(t) = -\frac{GM}{r(t)^3}y(t) \tag{1}$$

(適当な初期条件 $x(0) = a_1, y(0) = a_2, x'(0) = a_3, y'(0) = a_4$)

□ (1) を満たす $(x(t), y(t))$ を見つければ惑星の運動がわかったことになる (微分方程式を解くということ)

□ **初等的な求積法**

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = 2, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = t^2 + t + 1$$

惑星運動の方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\frac{GM}{r(t)^3}x(t), \qquad \frac{d^2}{dt^2}y(t) = -\frac{GM}{r(t)^3}y(t) \tag{1}$$

(適当な初期条件 $x(0) = a_1, y(0) = a_2, x'(0) = a_3, y'(0) = a_4$)

- □ 初等的な求積法は適用できない．
- □ 解を初等的な関数を用いて表現できない．(解析的には解けない)
- □ しかし，(ニュートンがやったように) 間接的な方法で，ケプラーの法則を証明することはできる．
  - ▷ ある時刻 t で，$x(t) =?$，$y(t) =?$
  - ▷ そこで，$x(t_n) \approx X^n$，$y(t_n) \approx Y^n$ を求める (数値解法)

数値解法の導入

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t)), \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{a} \qquad (2)$$

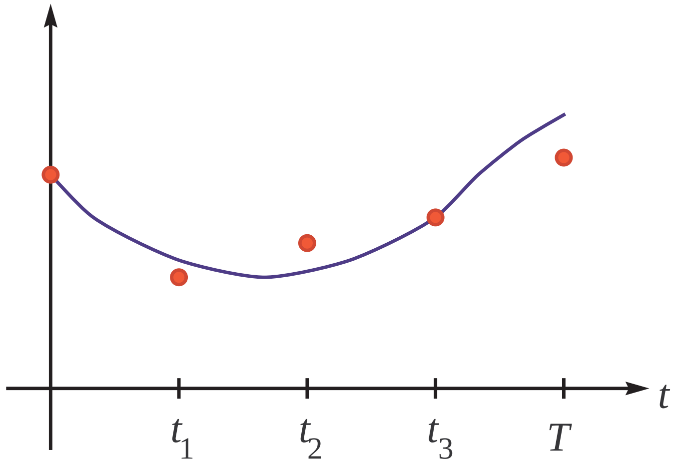
$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{u}) \\ f_2(\boldsymbol{u}) \\ f_3(\boldsymbol{u}) \\ f_4(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \\ -GMu_1/r^3 \\ -GMu_2/r^3 \end{pmatrix}$$

数値解法の導入

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t)), \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{a} \qquad (2)$$

- □ $0 \leqq t \leqq T$
- □ $h > 0$; $T = hN$ (N: 自然数)
- □ $t_n = nh \quad (n = 0, 1, \cdots, N)$
- □ $\boldsymbol{U}^n \approx \boldsymbol{u}(t_n)$

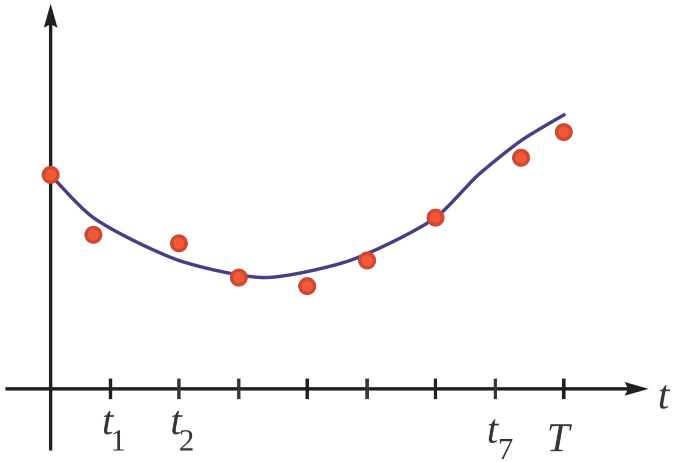


$$\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{U}^n + h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n), \quad \boldsymbol{U}^0 = \boldsymbol{a} \qquad (3)$$

数値解法の導入

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t)), \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{a} \qquad (2)$$

- $0 \leqq t \leqq T$
- $h > 0;\ T = hN$ (N: 自然数)
- $t_n = nh \quad (n = 0, 1, \cdots, N)$
- $\boldsymbol{U}^n \approx \boldsymbol{u}(t_n)$



$$\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{U}^n + h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n), \quad \boldsymbol{U}^0 = \boldsymbol{a} \qquad (3)$$

Euler 法の導出

スカラー値関数 $u(t)$

$$\frac{d}{dt}u(t) = f(u(t)) \tag{4}$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} \approx \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \quad (h > 0:\ \text{十分小})$$

$$\frac{u(t_n + h) - u(t_n)}{h} \approx f(u(t_n))$$

Euler 法の導出

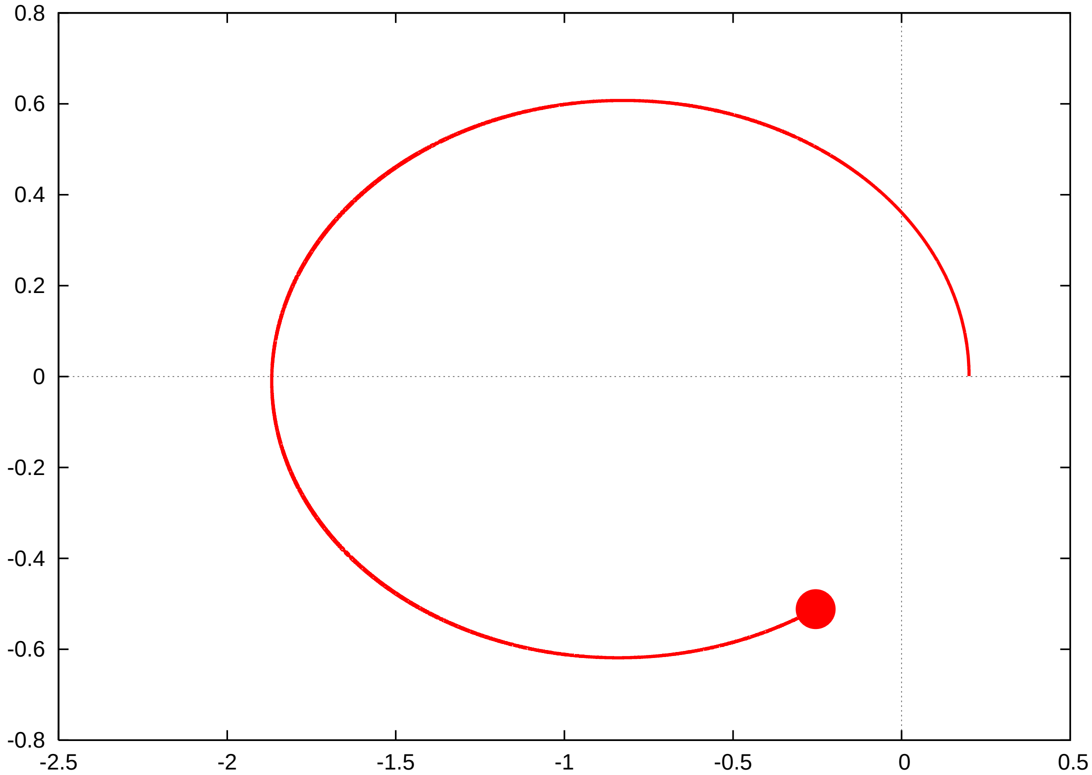
スカラー値関数 $u(t)$

$$\frac{d}{dt}u(t) = f(u(t)) \tag{4}$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} \approx \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \qquad (h > 0\text{: 十分小})$$

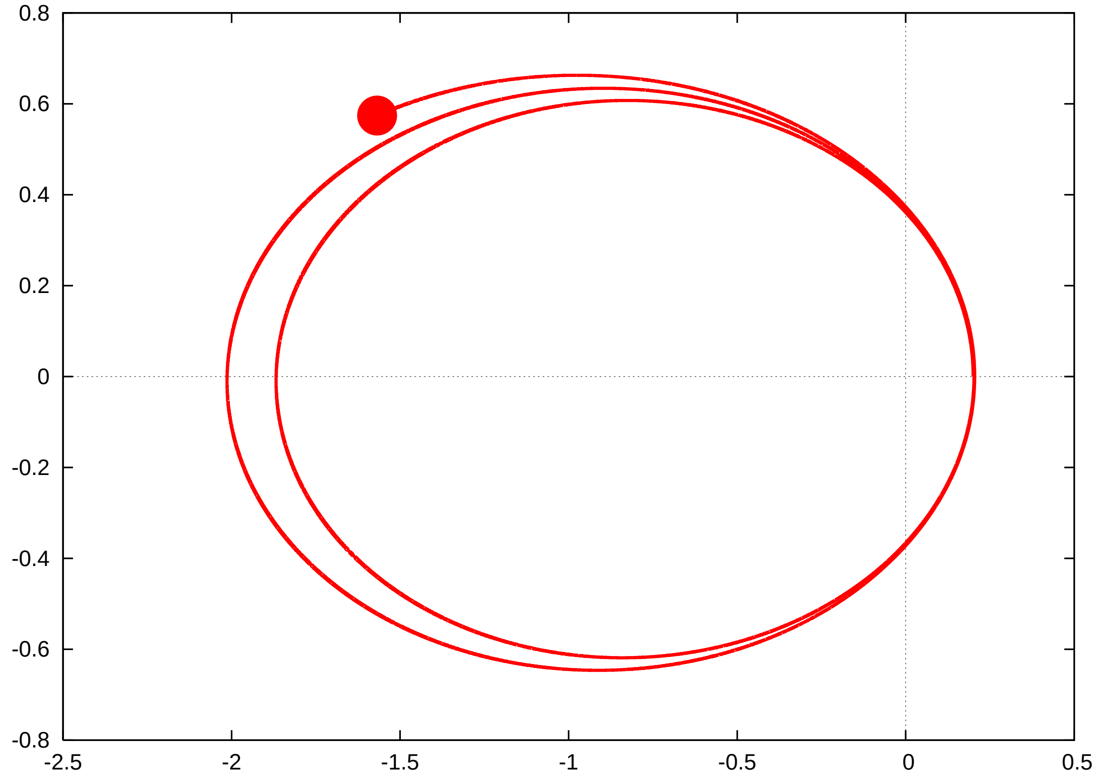
$$u(t_n) \approx U^n : \qquad \frac{U^{n+1} - U^n}{h} = f(U^n)$$

計算例 (Euler 法)



Euler 法 $(0 \leqq t \leqq 2;\ h = 0.0001)$

計算例 (Euler 法)



Euler 法 $(0 \leqq t \leqq 5;\ h = 0.0001)$

Euler 法の考察

定理 (Euler 法の誤差)：

$$\max_{0 \leqq t_n \leqq T} \|\boldsymbol{u}(t_n) - \boldsymbol{U}^n\| \leqq C_E h$$

□ $\|\boldsymbol{v}\| = \max\{|v_1|, |v_2|, |v_3|, |v_4|\}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$

□ $C_E = \dfrac{e^{LT} - 1}{2L} K$

$$K = \max_{0 \leqq t \leqq T} \|\boldsymbol{u}''(t)\|,\ J = \max_{0 \leqq t \leqq T} \|\boldsymbol{u}(t)\|,\ L = \max_{1 \leqq i,j \leqq 4} \max_{\boldsymbol{x} \in [-J,J]^4} \left| \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\boldsymbol{x}) \right|$$

Euler 法の考察

定理 (Euler 法の誤差)：

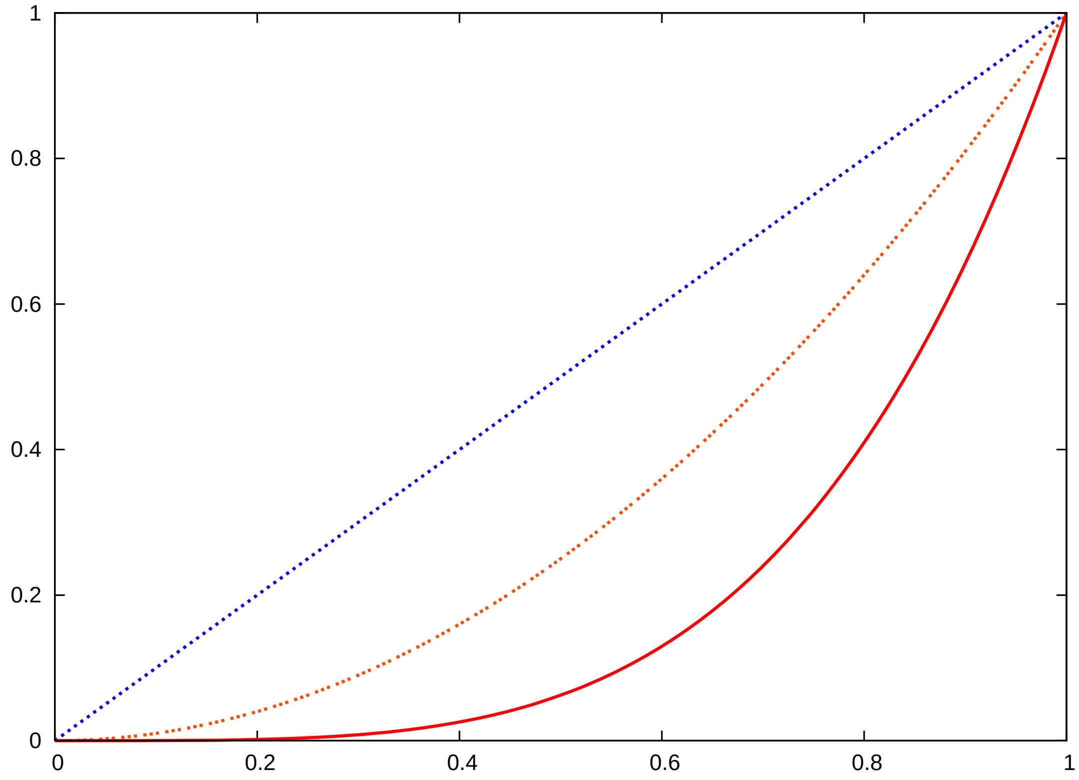
$$\max_{0 \leqq t_n \leqq T} \|\boldsymbol{u}(t_n) - \boldsymbol{U}^n\| \leqq C_E h$$

- □ この事実は，次に基づく：

$$\left\| \frac{\boldsymbol{u}(t_{n+1}) - \boldsymbol{u}(t_n)}{h} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t_n)) \right\| \leq (\text{定数}) \times h$$

- □ (誤差) $\leqq$ (定数) $\times h^\alpha$ の形 $\Leftrightarrow$ α 次精度の解法
- □ Euler 法は 1 次精度の解法 $\longrightarrow$ もっと高精度の解法?

1 次 vs. 高次



(上) h; (中) h^2; (下) h^4

Euler 法の一般化 (高精度化)

一般化

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{U}^n + h\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}^n)$$

Euler 法 (1 次精度)

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}^n) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n),$$

$$\max_{0 \leqq t_n \leqq T} \|\boldsymbol{u}(t_n) - \boldsymbol{U}^n\| \leqq C_E h$$

Euler 法の一般化 (高精度化)

一般化

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{U}^n + h\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}^n)$$

Heun 法 (2 次精度)

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}^n) = \frac{\boldsymbol{k}_1^n + \boldsymbol{k}_2^n}{2},$$

$$\boldsymbol{k}_1^n = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n),\ \boldsymbol{k}_2^n = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n + h\boldsymbol{k}_1^n),$$

$$\max_{0 \leqq t_n \leqq T} \|\boldsymbol{u}(t_n) - \boldsymbol{U}^n\| \leqq C_H h^2$$

Heun 法の導出 (スカラー値の場合)

次のようにおいて，α と β を求める：

$$F(U_n) = \alpha k_1 + \beta k_2, \qquad k_1 = f(U_n), \qquad k_2 = f(U_n + hk_1).$$

$u_n = u(t_n)$，$f_n = f(u_n)$ と書くことにすると，

$$\tau_n \equiv \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h} - F(u(t_n)) = \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h} - [\alpha f_n + \beta f(u_n + hf_n)].$$

$f(u_n + hf_n)$ と $u(t_n + h)$ を，それぞれ u_n, t_n を中心に Taylor 展開して代入：

$$\tau_n = [1 - (\alpha + \beta)]\, f_n + hf_n f'(u_n) \left(\frac{1}{2} - \beta\right) + h^2 \left[\frac{u^{(3)}(t_\zeta)}{3!} - \frac{f_n^2 f''(u_\theta)}{2}\beta\right]$$

$$(t_\zeta = (1-\zeta)t_n + \zeta t_{n+1}, u_\theta = (1-\theta)u_n + \theta u_{n+1};\ \zeta, \theta \in (0,1))$$

を得る．これより，$\alpha = \beta = 1/2$ と選ぶと，$|\tau_n| \leqq$ (定数) $\times\, h^2$.

Euler 法の一般化 (高精度化)

一般化

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{U}^n + h\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}^n)$$

Heun 法 (2 次精度)

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}^n) = \frac{\boldsymbol{k}_1^n + \boldsymbol{k}_2^n}{2},$$

$$\boldsymbol{k}_1^n = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n),\ \boldsymbol{k}_2^n = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n + h\boldsymbol{k}_1^n),$$

$$\max_{0 \leqq t_n \leqq T} \|\boldsymbol{u}(t_n) - \boldsymbol{U}^n\| \leqq C_H h^2$$

Euler 法の一般化 (高精度化)

一般化

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{U}^n + h\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}^n)$$

もっと高精度を！

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}^n) = \alpha \boldsymbol{k}_1^n + \beta \boldsymbol{k}_2^n + \gamma \boldsymbol{k}_3^n + \delta \boldsymbol{k}_4^n,$$

$$\boldsymbol{k}_1^n = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n),\ \boldsymbol{k}_2^n = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n + hs\boldsymbol{k}_1^n), \boldsymbol{k}_3^n = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n + hv\boldsymbol{k}_2^n),\ \boldsymbol{k}_4^n = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n + hw\boldsymbol{k}_3^n),$$

とおいて,

$$\left\| \frac{\boldsymbol{u}(t_{n+1}) - \boldsymbol{u}(t_n)}{h} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(t_n)) \right\| \leq (\text{定数}) \times h^4$$

となるように, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, s, v, w$ を求める.

Euler 法の一般化 (高精度化)

一般化

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{U}^n + h\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}^n)$$

Runge-Kutta 法 (4 次精度)

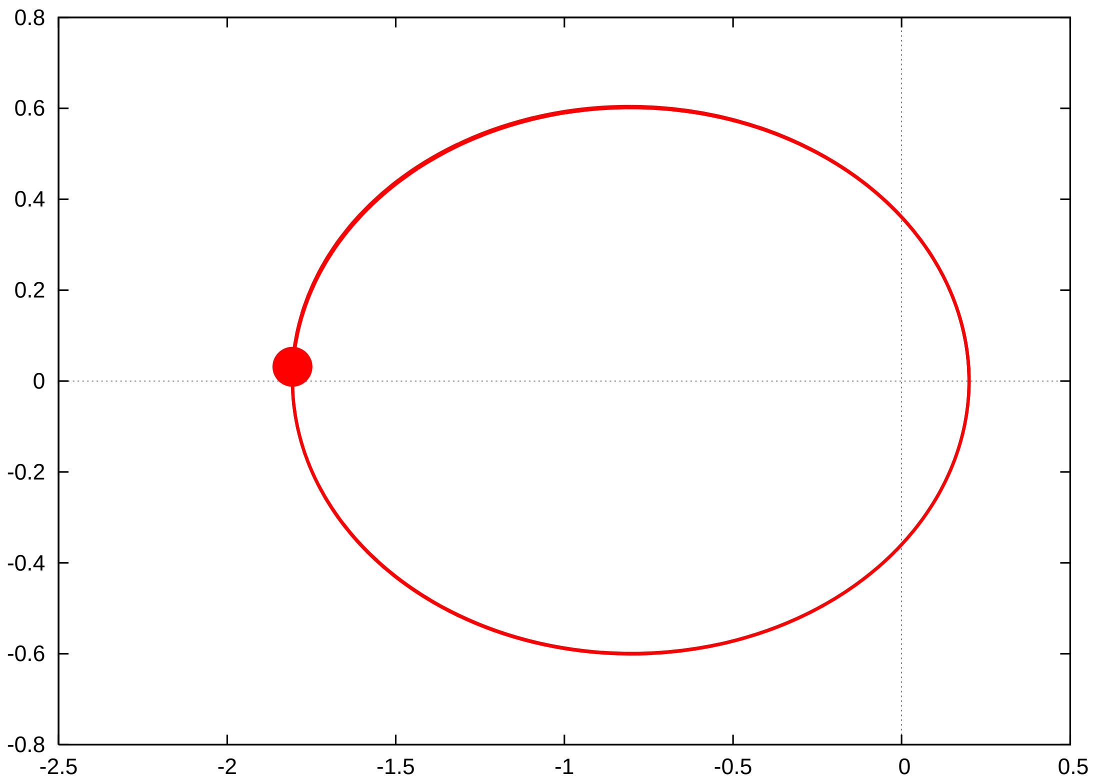
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}^n) = \frac{\boldsymbol{k}_1^n + 2\boldsymbol{k}_2^n + 2\boldsymbol{k}_3^n + \boldsymbol{k}_4^n}{6},$$

$$\boldsymbol{k}_1^n = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n),\ \boldsymbol{k}_2^n = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n + \tfrac{h}{2}\boldsymbol{k}_1^n),$$

$$\boldsymbol{k}_3^n = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n + \tfrac{h}{2}\boldsymbol{k}_2^n),\ \boldsymbol{k}_4^n = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n + h\boldsymbol{k}_3^n),$$

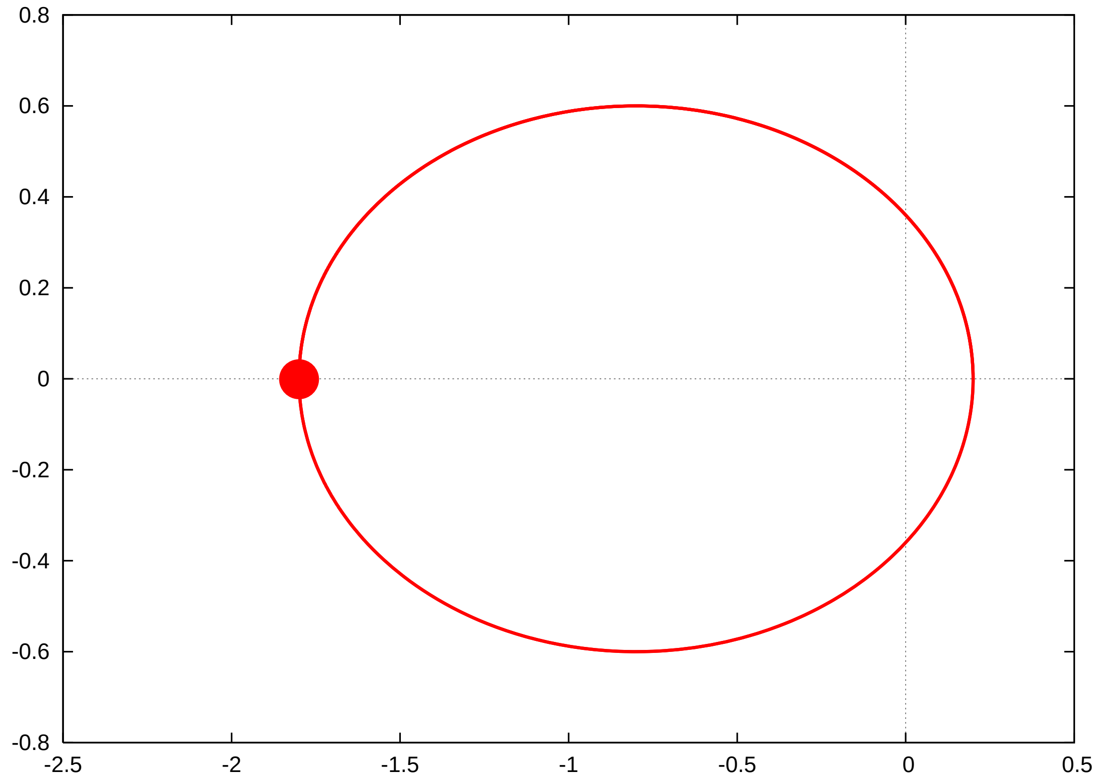
$$\max_{0 \leqq t_n \leqq T} \|\boldsymbol{u}(t_n) - \boldsymbol{U}^n\| \leqq C_{RK} h^4$$

数値計算結果



Heun 法 $(0 \leqq t \leqq 5;\ h = 0.001)$

数値計算結果



Runge-Kutta 法 $(0 \leqq t \leqq 5;\ h = 0.001)$

単振動

単振動

$$-\frac{d^2}{dt^2}x(t) = x(t) \tag{6}$$

一般解は,

$$x(t) = A\cos t + B\sin t \qquad (A, B\text{: 定数})$$

$\boxed{\text{数値計算}}$　初期値 $x(0) = 1,\ \ x'(0) = B \approx -0.023127$ とする.

数値解法

$$(6) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t))$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{u}) \\ f_2(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix}$$

数値解法

$$(6) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t))$$

Euler 法

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{U}^n + h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} X^{n+1} \\ Y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^n \\ Y^n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} Y^n \\ -X^n \end{pmatrix}$$

修正 Euler 法

$$\begin{pmatrix} X^{n} \\ Y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{n-1} \\ Y^n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} Y^n \\ -X^n \end{pmatrix} \quad (n \geq 1)$$

数値解法

$$(6) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t))$$

修正 Euler 法

$$\begin{pmatrix} X^n \\ Y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{n-1} \\ Y^n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} Y^n \\ -X^n \end{pmatrix} \quad (n \geq 1),$$

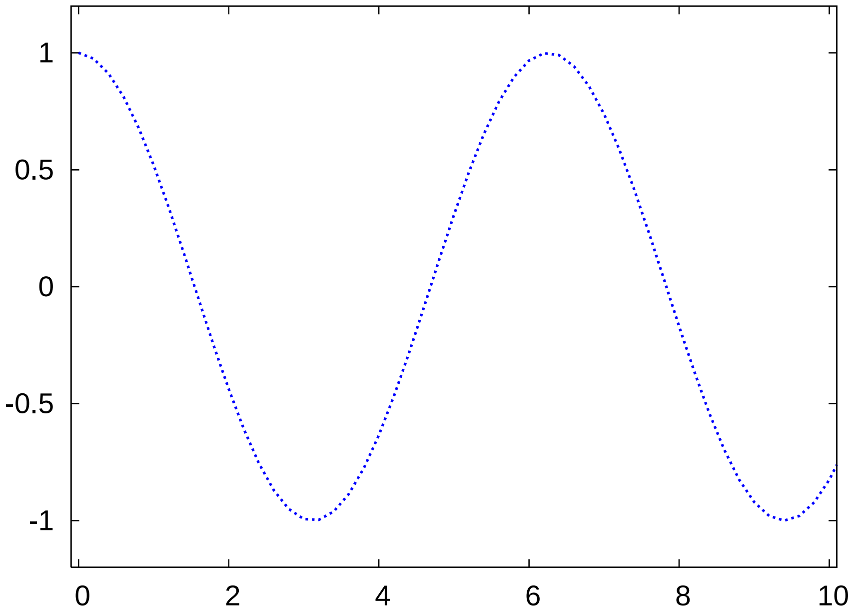
$$\max_{0 \leq t_n \leq T} \|\boldsymbol{u}(t_n) - \boldsymbol{U}^n\| \leqq C_{ME} h$$

Runge-Kutta 法

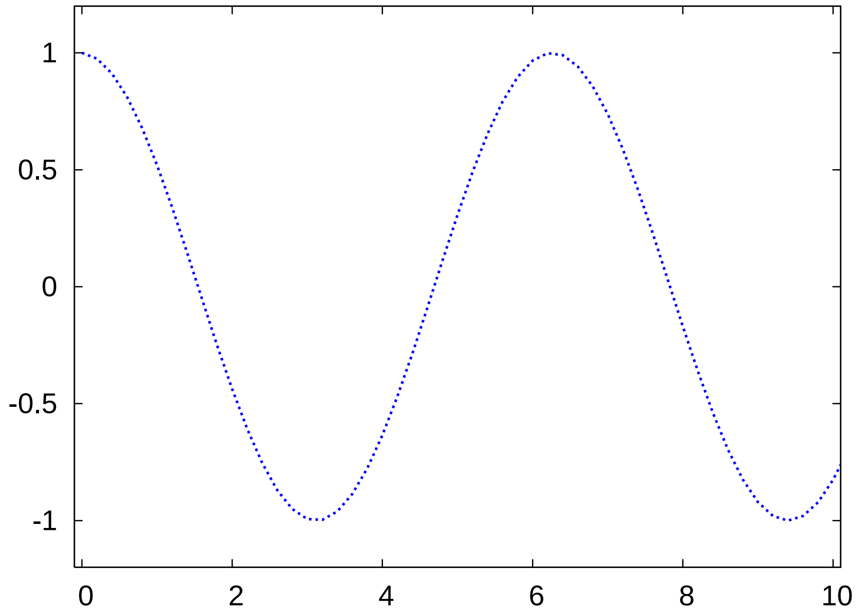
$$\cdots\cdots$$

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} \|\boldsymbol{u}(t_n) - \boldsymbol{U}^n\| \leqq C_{RK} h^4$$

数値計算結果



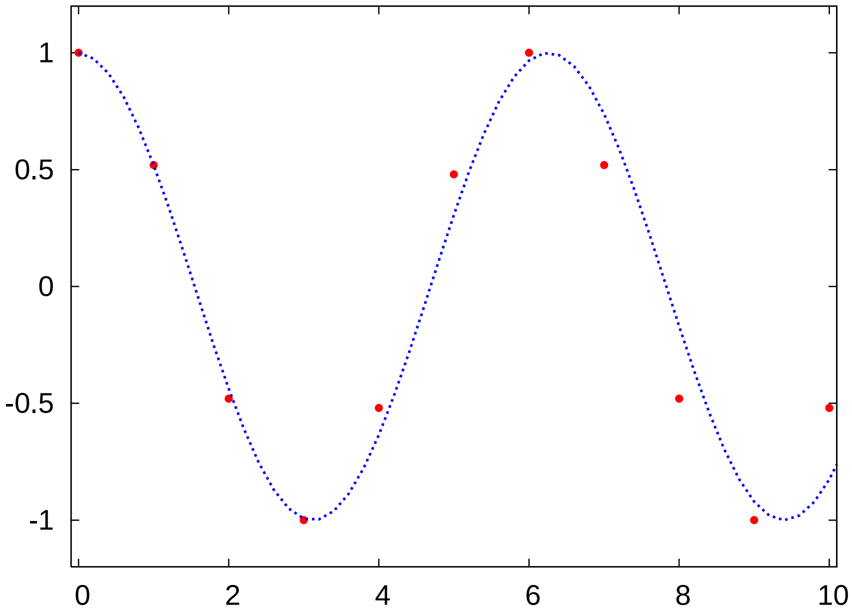
$$x(t) = \cos t + B \sin t$$



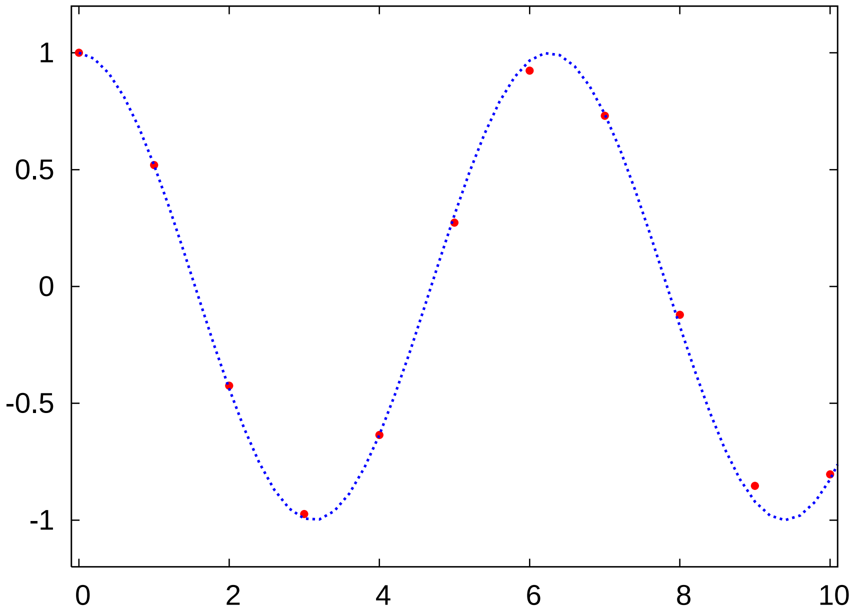
$$x(t) = \cos t + B \sin t$$

(いずれも，$h = 1$)

数値計算結果



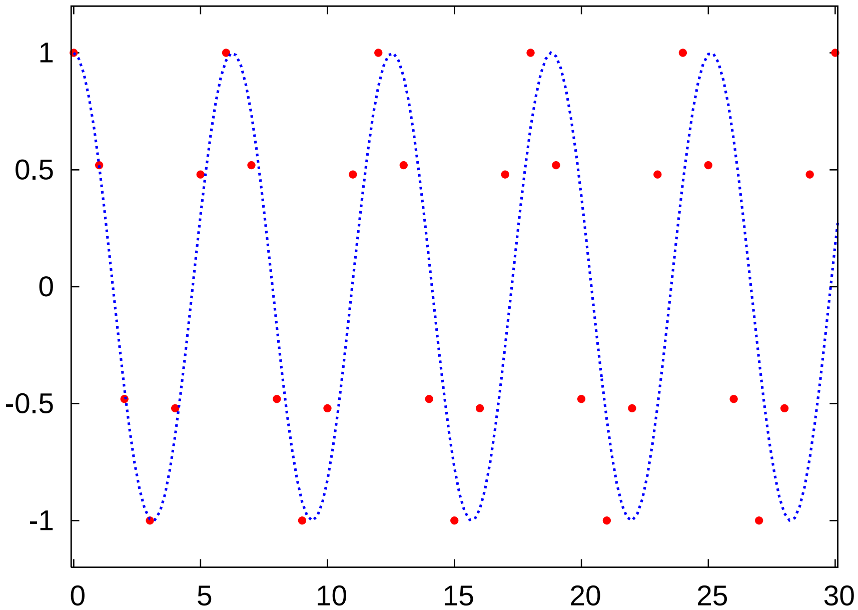
Euler 法 $(0 \leqq t \leqq 10)$



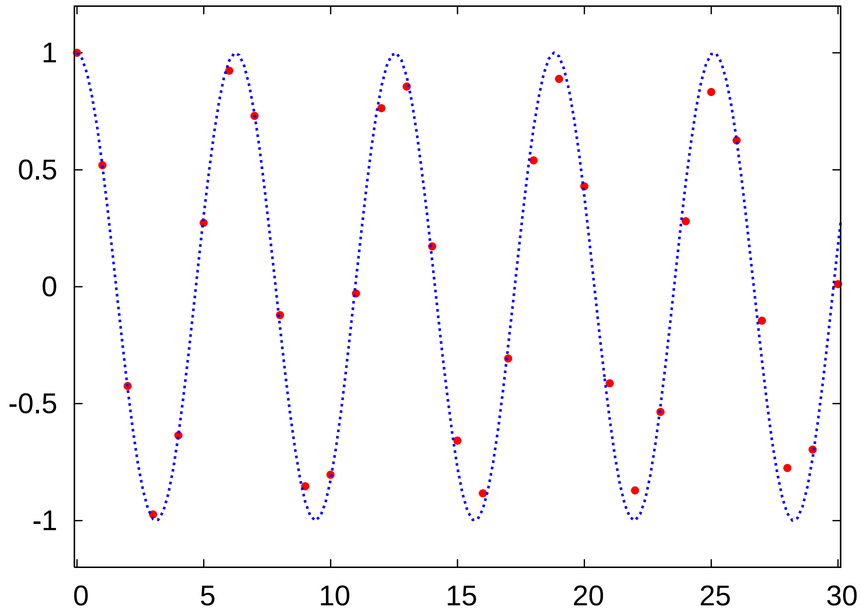
Runge-Kutta 法 $(0 \leqq t \leqq 10)$

(いずれも，$h = 1$)

数値計算結果



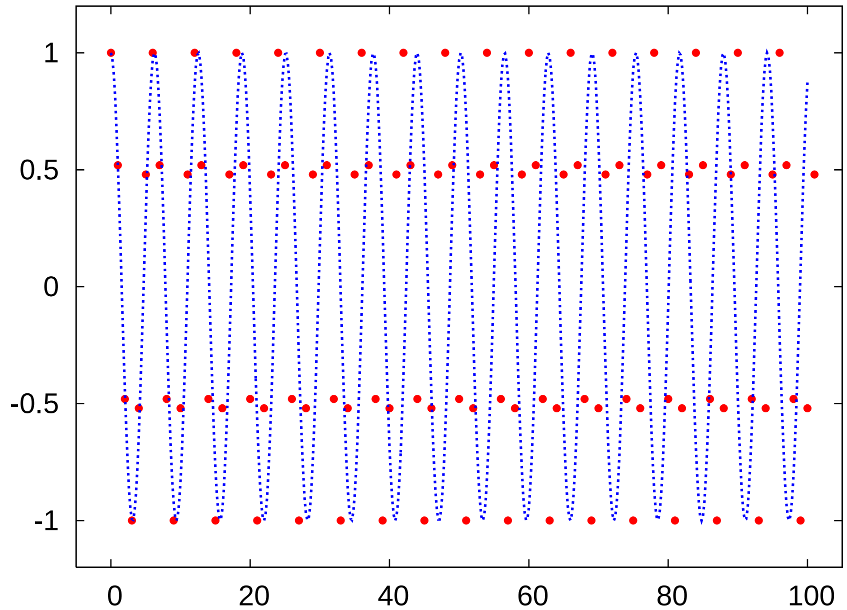
Euler 法 $(0 \leqq t \leqq 30)$



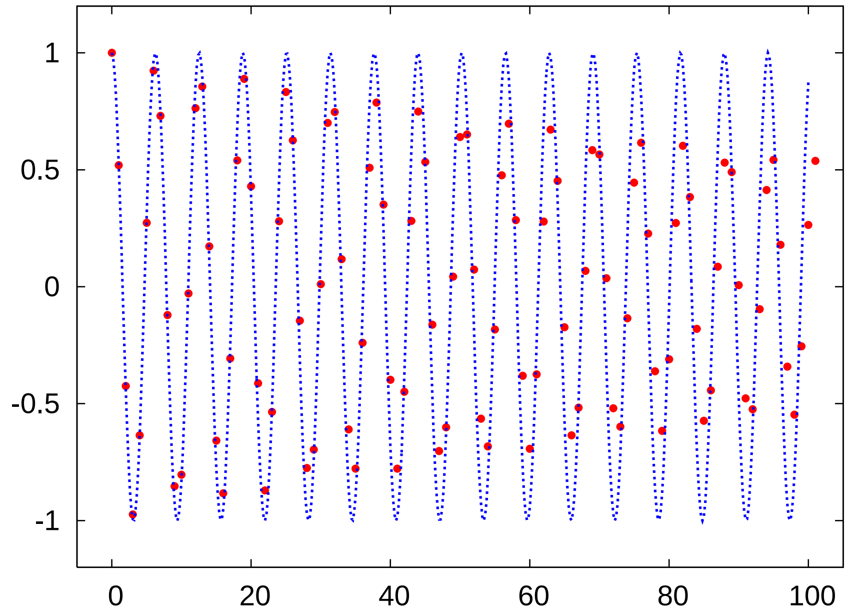
Runge-Kutta 法 $(0 \leqq t \leqq 30)$

(いずれも，$h = 1$)

数値計算結果



Euler 法 $(0 \leqq t \leqq 100)$



Runge-Kutta 法 $(0 \leqq t \leqq 100)$

(いずれも，$h = 1$)

エネルギーの保存

□ 単振動の方程式 (6) の解 $x = x(t)$

$$E = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2 = (t \text{ に依存しない定数}) \tag{7}$$

□ 修正 Euler 法の解 X^n

$$\left(\frac{X^{n+1} - X^n}{h}\right)^2 + X^{n+1}X^n = (n \text{ に依存しない定数})$$

□ Runge-Kutta 法の解 X^n

$$\cdots\cdots?$$

ロジスティック方程式

マルサスの法則

- ある地域に住む生物の個体群の数 (密度)：$v = v(t)$
- 出生率: n，死亡率: m
- 個体数の時間変化 (マルサスの法則)

$$\frac{d}{dt}v(t) = av(t) \qquad (a = n - m：\text{マルサス係数})$$

- 簡単に解ける：$v(t) = v(0)e^{at}$
- $a > 0$ のとき，$t \to \infty$ で $v(t) \to \infty$ (発散)
- $a < 0$ のとき，$t \to \infty$ で $v(t) \to 0$ (絶滅)
- T. R. Malthus (1766–1834，英）経済学者

ロジスティック方程式

- 個体数が増加 $\rightarrow$ 増加率は減少: $a = \varepsilon - \lambda v(t)$
- 個体数の時間変化 (ロジスティック方程式)

$$\frac{d}{dt}v(t) = \{\varepsilon - \lambda v(t)\}v(t)$$

- 佐藤總夫：「自然の数理と社会の数理—微分方程式で解析する—1 」(日本評論社，1984 年) では，ピアノの生産台数やエアコンの生産台数の伸展，NHK テレビ受信契約数の推移を表現したモデルとして登場 (昭和 20 年代後半〜昭和 40 年代のデータを使用).
- 「1838 年にベルハルストが考案した。彼は、人口増加を説明するモデルとして、この式を考案した（彼が兵站学 (ロジスティクス) 教官であったためロジスティックと命名したといわれる）」出典: フリー百科事典・ウィキペディア（Wikipedia）,『ロジスティック式』より

ロジスティック方程式

- □ 個体数が増加 $\to$ 増加率は減少: $a = \varepsilon - \lambda v(t)$
- □ 個体数の時間変化 (ロジスティック方程式)

$$\frac{d}{dt}v(t) = \{\varepsilon - \lambda v(t)\}v(t)$$

非線形だが，変数分離法で簡単に解ける：

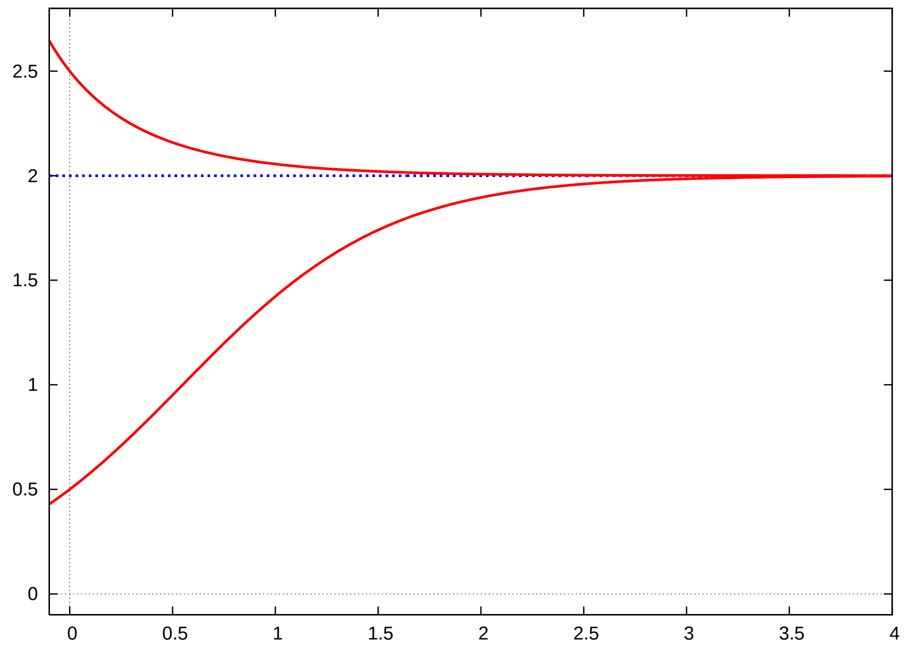
$$v(t) = \frac{\varepsilon C e^{\varepsilon t}}{1 + \lambda C e^{\varepsilon t}} \qquad \left(C = \frac{v_0}{\varepsilon - \lambda v_0} \right)$$

(初期時刻：$t = 0$，初期値：$v(0) = v_0$ とした)

ロジスティック方程式

- 個体数が増加 $\rightarrow$ 増加率は減少: $a = \varepsilon - \lambda v(t)$
- 個体数の時間変化 (ロジスティック方程式)

$$\frac{d}{dt}v(t) = \{\varepsilon - \lambda v(t)\}v(t)$$



$$v(t) = \frac{\varepsilon C e^{\varepsilon t}}{1 + \lambda C e^{\varepsilon t}}$$

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

(上) $v_0 > \frac{\varepsilon}{\lambda}$ (下) $v_0 < \frac{\varepsilon}{\lambda}$

ロジスティック方程式

- □ 個体数が増加 $\to$ 増加率は減少: $a = \varepsilon - \lambda v(t)$
- □ 個体数の時間変化 (ロジスティック方程式)

$$\frac{d}{dt}v(t) = \{\varepsilon - \lambda v(t)\}v(t)$$

数値解法 $h > 0,\ t = nh\ (n = 0, 1, \ldots),\ V^n \approx v(t_n)$

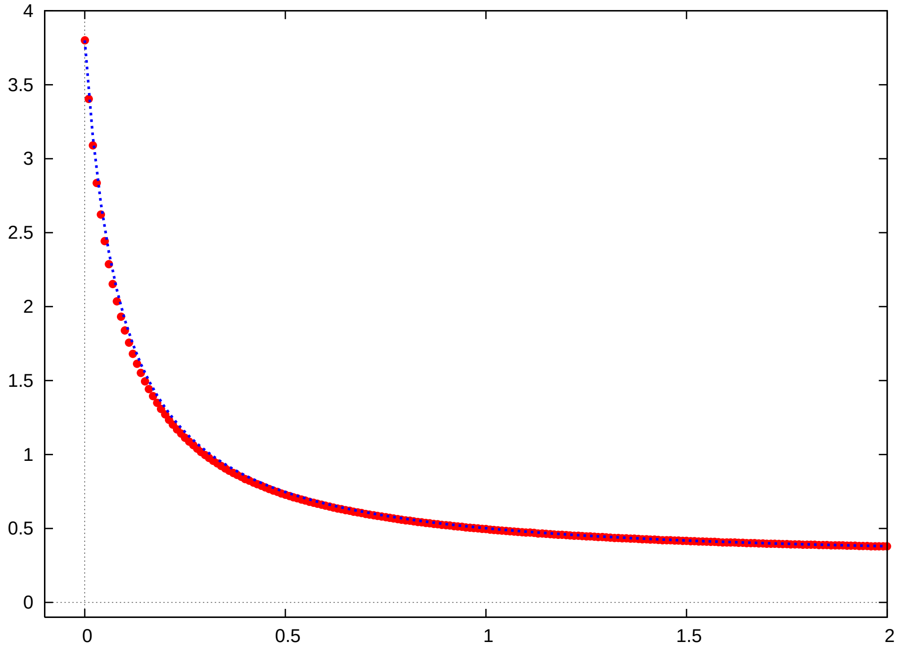
Euler 法

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{h} = (\varepsilon - \lambda V^n)V^n, \quad V^0 = v_0 \tag{i}$$

Euler 法の計算例

Euler 法

$$\frac{V^{n+1}-V^{n}}{h}=(\varepsilon-\lambda V^{n})V^{n},\quad V^{0}=v_{0} \tag{i}$$



$v_0 = 3.0,\ \varepsilon = 1,\ \ \lambda = 3$

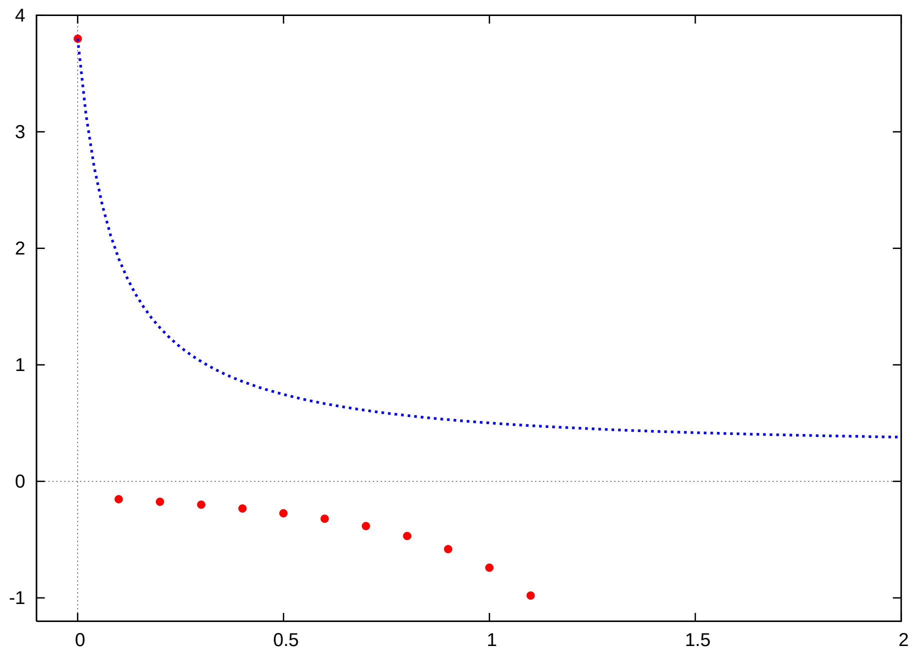
$h = 0.01$

良さそうである

Euler 法の計算例

Euler 法

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{h} = (\varepsilon - \lambda V^n)V^n, \quad V^0 = v_0 \qquad \text{(i)}$$



しかし，同じ条件で $h = 0.1$ とすると….

Euler 法の計算例

Euler 法

$$\frac{V^{n+1}-V^n}{h} = (\varepsilon - \lambda V^n)V^n, \quad V^0 = v_0 \tag{i}$$

□ 一般論から

$$\max_{0 \leqq t \leqq T} |v(t_n) - V^n| \leqq Ch$$

は保障されている．

□ ????

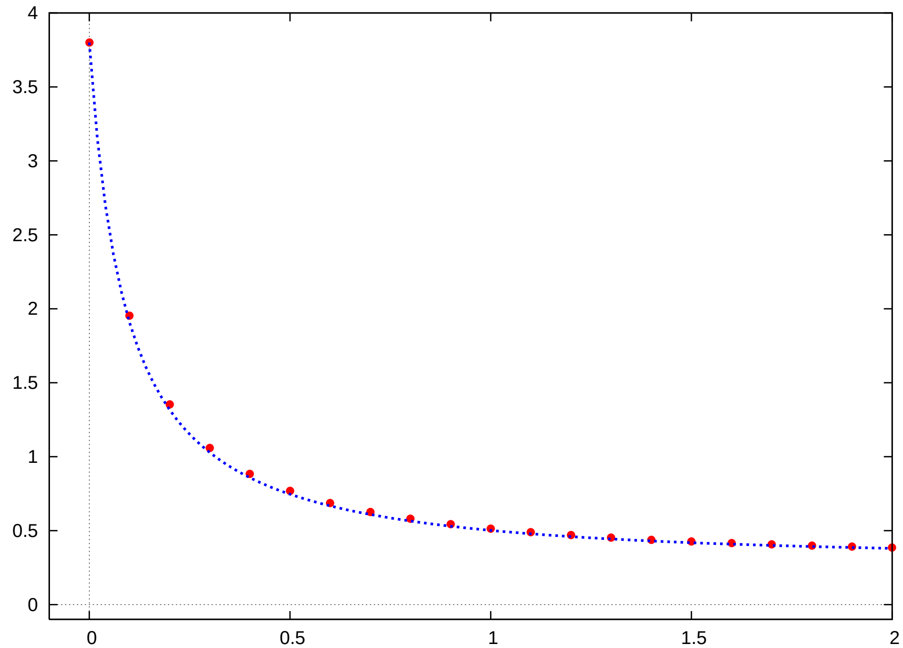
□ 高精度の解法を適用，それとも.....

修正 Euler 法

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{h} = (\varepsilon - \lambda V^{n+1})V^n, \quad V^0 = v_0 \tag{ii}$$

修正 Euler 法

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{h} = (\varepsilon - \lambda V^{n+1})V^n, \quad V^0 = v_0 \qquad \text{(ii)}$$



前と同じ条件

$h = 0.1$

どのように h を取ってもうまくいく．(近似としての意味は薄れても)

正値性の保存

問題

$$V^n > 0 \quad \Rightarrow \quad V^{n+1} > 0 \quad ?$$

正値性の保存

問題

$$V^n > 0 \quad \Rightarrow \quad V^{n+1} > 0 \quad ?$$

□ (ii) については，(ii) $\Leftrightarrow$ $V^{n+1} = \dfrac{(1+\varepsilon h)V^n}{1+\lambda h V^n}$ なので，常に **YES**

正値性の保存

問題

$$V^n > 0 \quad \Rightarrow \quad V^{n+1} > 0 \quad ?$$

□ (ii) については，(ii) $\Leftrightarrow V^{n+1} = \dfrac{(1+\varepsilon h)V^n}{1+\lambda h V^n}$ なので，常に **YES**

□ (i) については，(i) $\Leftrightarrow V^{n+1} = (1 + h\varepsilon - h\lambda V^n)V^n$ なので，

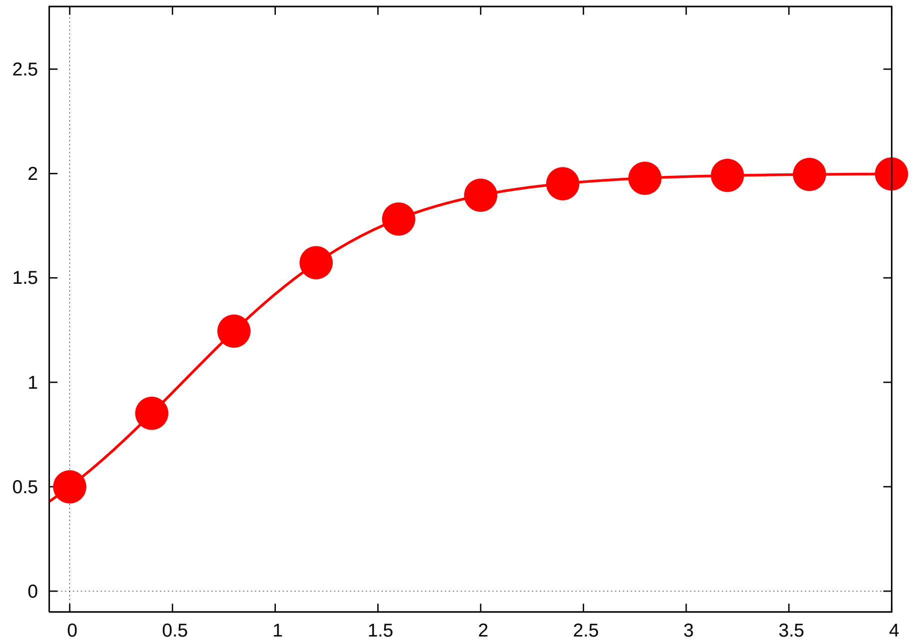
$h < \dfrac{1}{\lambda V^n - \varepsilon}$ ならば **YES**

そうでなければ，**NO** $\to V^n > 0$ でも $V^{n+1} \leqq 0$ となる

森下の差分方程式

M. Morisita (1965)

$$V^{n+1} = \frac{(1+\varepsilon B)V^n}{1+\lambda B V^n} \qquad \left(B = \frac{e^{h\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right) \qquad \text{(iii)}$$



□ 各 V^n は，厳密に，ロジスティック曲線上にある．

$$V^n = v(t_n) \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

□ (導出には，ロジスティック方程式の厳密解を使う．)

森下の差分方程式

M. Morisita (1965)

$$V^{n+1} = \frac{(1+\varepsilon B)V^n}{1+\lambda BV^n} \qquad \left(B = \frac{e^{h\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right) \qquad \text{(iii)}$$

□ (iii) $\Leftrightarrow \dfrac{V^{n+1}-V^n}{B} = (\varepsilon - \lambda V^{n+1})V^n$

□ $h \ll 1 \Rightarrow e^{h\varepsilon} - 1 \approx h\varepsilon \Rightarrow B \approx h$

$$\text{(iii)} \quad \leftrightarrow \quad \frac{V^{n+1}-V^n}{h} = (\varepsilon - \lambda V^{n+1})V^n.$$

□ (i), (ii) はどちらが良い数値解法か？

森下の差分方程式への注意

$$\frac{d}{dt}v(t) = \{\varepsilon - \lambda v(t)\}v(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}v(t) \cdot \frac{1}{v(t)} = \varepsilon - \lambda v(t)$$

これより,

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{v_n} = C - Dv_n \qquad (?)$$

と予想される.

森下の差分方程式への注意

$$\frac{d}{dt}v(t) = \{\varepsilon - \lambda v(t)\}v(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}v(t)\cdot\frac{1}{v(t)} = \varepsilon - \lambda v(t)$$

これより，

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{v_n} = C - Dv_n \qquad (?)$$

と予想される．しかし実は，

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{v_n} = C - Dv_{n+1}$$

拡散増殖モデル

ロジスティック方程式において，空間的な拡がりを考慮に入れる：

I: 区間

$u = u(x,t)\ (x \in I,\ t > 0)$: 個体群密度

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\varepsilon - \lambda u)u, \quad (x \in I,\ t > 0)$$

(+ 境界条件，初期条件)

拡散増殖モデル

ロジスティック方程式において，空間的な拡がりを考慮に入れる：

Ω: 平面内の領域

$u = u(x, y, t)\ ((x, y) \in \Omega,\ t > 0)$: 個体群密度

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\varepsilon - \lambda u)u, \quad ((x, y) \in \Omega,\ t > 0)$$

(+ 境界条件，初期条件)

拡散増殖モデル

ロジスティック方程式において，空間的な拡がりを考慮に入れる：

Ω: 平面内の領域

$u = u(x, y, t)\ ((x, y) \in \Omega,\ t > 0)$: 個体群密度

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\varepsilon - \lambda u)u, \quad ((x, y) \in \Omega,\ t > 0)$$

(+ 境界条件，初期条件)

- □ ロジスティック方程式への考察が生かされる
- □ 山口 昌哉 (編)：**数値解析と非線形現象**，日本評論社，1996 年 (オリジナルは 1981 年)

まとめ

まとめ

- □ 微分方程式の離散化に現れる問題 (issue) を 3 つ紹介：

  1. 惑星運動の方程式
  2. 単振動
  3. ロジスティック方程式

- □ 「無限と連続」という古くて現代的な問題の一側面

まとめ

□ 微分方程式の離散化に現れる問題 (issue) を 3 つ紹介：

1. 惑星運動の方程式 $\rightarrow$ 高精度化
2. 単振動 $\rightarrow$ 構造 (エネルギー保存) の保存
3. ロジスティック方程式 $\rightarrow$ 構造 (正値性) の保存，(**非線形性**)

□ 「無限と連続」という古くて現代的な問題の一側面

謝辞． 単振動の方程式に対する修正 Euler 法は，高橋大輔先生 (早稲田大学基幹理工学部) から教えて頂きました．ありがとうございます．