東京大学理学部オープンキャンパス

三角形の形*

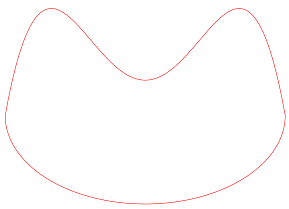
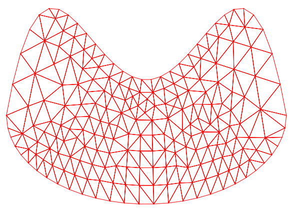
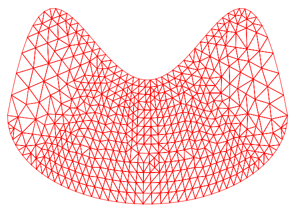
—シュワルツの提灯から科学計算へ—

齊藤 宣一（数理科学研究科）

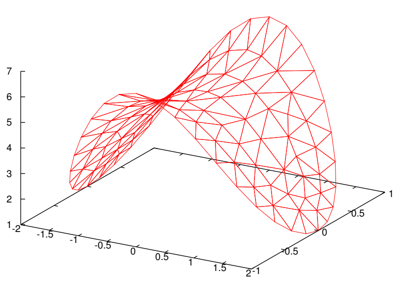
2014 年 8 月 7 日

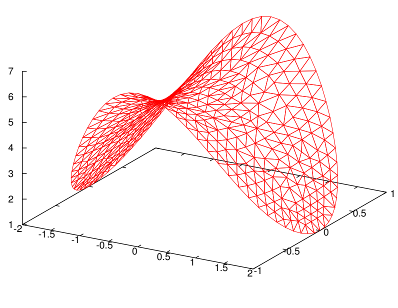
「五角形の面積を求めなさい」と言われたら，どうするでしょうか？対角線を 2 本描いて，五角形を 3 つの三角形に分割して，各三角形の面積を求めて，それを足す，と考えるのは自然でしょう．もちろん，三角形が面積を求めやすい形をしているとは限らないので，いろいろなアイデアと組み合わせる必要はありますが．

とはいえ，この考え方は，複雑な形をした（円や楕円でない）曲線で囲まれた図形の面積を求める際にも応用できます．すなわち，図形の中に，小さな（互いに重ならない）三角形を敷き詰め，その三角形の面積の総和を計算します．すべての三角形を合わせてできる多角形は,（特別な場合を除けば）はじめの図形とは一致しませんが，できるだけ三角形を小さくして，多くの三角形を敷き詰めれば，正確な近似値，すなわち，小数で表現したときに，多くの桁が一致するような値が得られます.（実際には，三角形を小さくしなければならないのは，曲がった部分の近くのみです．また，先に曲線上に点をたくさん置いて，それらが頂点となるように三角形を作ります.）

それでは，図形が “平ら” なものでなく，“曲がった” もの，すなわち，曲面である場合，同じ考え方が応用できるでしょうか？すなわち，曲面の面積を求める際，曲面上に，小さな三角形を敷き詰めて，その面積の総和を計算することで，曲面の面積の近似値が得られるでしょうか？このとき，各三角形の各頂点は曲面上にあり，各三角形は三頂点を結んでできる平らな図形（ふつうの三角形）であるとします．したがって，三角形をすべて集めてできる図形は，もとの曲面には含まれません．このような三角形の集合を曲面の**三角形分割**，三角形の面積の総和を**三角形分割の面積**，三角形を小さくしていく操作を**分割を細かくする**と呼ぶことにしましょう．

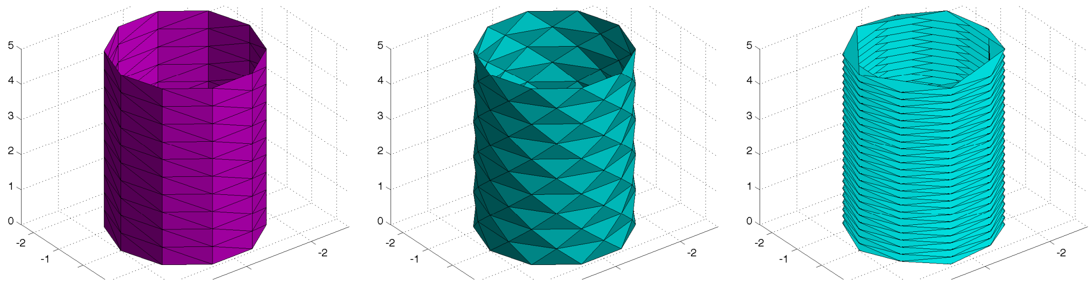




*講義で使うスライドは公開予定です．`http://www.infsup.jp/saito/materials/140807saito.pdf`（講義終了後二三日お待ち下さい）

このような問題は，単に近似値を求めるということに限らず，“そもそも曲面の面積とは何か？それをどう定義するべきか？” という基本的な問題と密接に関係しています．というのも，もしこの方法が有効ならば，分割を細かくした際の三角形分割の面積の “極限値” として，曲面の面積を定義することができるからです．

考えやすい例題として，底面の半径 r が，高さが h の円柱の側面の面積を求める問題を考えてみましょう．側面を展開してできる長方形を考えることで，求める側面積が $2\pi rh$ となることは，中学校で習っています．さて，三角形分割を実際に作って，面積を計算してみると，奇妙な現象に出会います．三角形分割の作り方は，それこそ，無数にあります．分割を細かくすれば，確かに三角形分割の面積が $2\pi rh$ にとても近くなるような三角形分割の仕方は，もちろんたくさんあります．しかし，分割の仕方によっては，分割をいくら細かくしても，三角形分割の面積が $2\pi rh$ とは全く異なる値に近づくことがあります．また，値が限りなく大きくなってしまうこともあります．このような，病的な例は，1880 年頃に，シュワルツ (H. A. Schwarz, 1843-1921) やペアノ (G. Peano, 1858-1932) によって指摘されました．



その後，一般の曲面に対しても，三角形分割の方法を適用する際には，分割に用いる三角形の “形状” が重要であることがわかりました．特に，三角形分割を用いて曲面の面積が計算できるための十分条件をラーデマッヘル (H. Rademacher, 1892-1969) やヤング (W. H. Young, 1863-1942) が見つけました（彼らが見つけたのは異なる条件です）．

さて，ここで，現代の科学技術計算に話を移しましょう．コンピュータ技術の発達により，(例えば，京コンピュータを使った）大規模なコンピュータシミュレーションが可能となりました．そして，偏微分方程式による数理モデル化と有限要素法による計算によって，気象のシミュレーションや人間の大動脈血流解析などが実際に行われています．現象全体は複雑でも，小さな部分に着目すれば，簡単な原理にしたがっているであろうと考え，有限要素法では，計算領域を小さな四面体や三角形に分割し，各四面体や三角形上で，簡単な方程式をたてて，また，それを総合することでシミュレーションを行います．その際，どのように分割するべきか？という基本的な問題があります．数学的な観点からは，1968 年にズラマール (M. Zlámal) が**最小角条件**を，1976 年にバブシュカ (I. Babuška) とアジジ (A.K. Aziz) が**最大角条件**を提出し問題を解決しました．実は，これらは，それぞれ，ラーデマッヘルとヤングが見つけた十分条件と同じものなのです．しかし，このことは，有限要素法の歴史の中では，現在でも，明確には認識されていないようです．そして，最近，小林健太（一橋大学）と土屋卓也（愛媛大学）という二人の日本人数学者によって，**外接半径条件**というより一般的（で極めて本質的）な条件が提出されました．また，この条件を曲面積の定義の問題に応用すると，ラーデマッヘルとヤングの条件を完全に含むものであることも，つい最近わかりました．このように数学においても（あるいは，数学と言う人間的な学問だからこそ），歴史は繰り返し，かつ，少しずつ進歩します．

この講義では，主に，円柱の側面積の計算，特に，シュワルツによる例（シュワルツの提灯）について詳しく説明をします．ラーデマッヘルとヤングの条件や，有限要素法への応用については，簡単に紹介します．

参考書． [1] 一松信，解析学序説（下巻），裳華房，1967 年．

[2] T. Radó, On the problem of Plateau, Chelsea Publ., 1951.

[3] K. Kobayashi and T. Tsuchiya, A Babuška-Aziz type proof of the circumradius condition, Jpn J. Indust. Appl. Math. **31** (2014) 193–210.