

## 数学特別講義 (応用数学 II) 「有限要素法の数理」レポート問題

以下の 8 題の内, 1 題を選んで解け.

ただし, 具体的な記号や設定は, 最新の講義ノートを参照すること.

**提出先** 数学科事務室のレポートボックス

**締切** 2020 年 1 月 8 日 (水) 15:00

**問い合わせ** norikazu@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

1. §1 で導入した Ritz 近似 (1.8) において,  $u_N = \sum_{j=1}^N U_j \phi_j$  と書くと, 連立一次方程式 (1.11) が導かれることを示せ.
2. §2 における表記の下で, 次が成り立つことを示せ.

$$\int_T \lambda_{T,i}(x) \lambda_{T,j}(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{6} \text{area}(T) & (i = j), \\ \frac{1}{12} \text{area}(T) & (i \neq j). \end{cases}$$

3. §4 の例 4.3 において, 関数  $u(x, y) = \phi(r)w(r, \theta)$  が考えている Poisson 方程式の境界値問題の解になっていることを示せ. [関数形が具体的に与えられているので, 素直に,  $\Delta u$  を計算すれば良い.]
4. §5 において, 条件 (5.2) と,

$$\theta_1 = \inf_{\mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}_h} \min_{T \in \mathcal{T}_h} \theta_T > 0$$

が同値になることを示せ. ただし,  $\theta_T$  は  $T$  の最小角を表す.

5. §5 の定理 5.1 の証明を, 講義ノートを参照しつつ, 自分で再構成せよ. (なぞるだけでも良い.)
6. §7 の応用に出てくる双線型形式  $a$  が有界になることを示せ.
7. §8 に出てくる Riesz 写像について, これが全単射であり,  $\|J_X F\|_X = \|F\|_{X'}$  が成り立つことを示せ.
8. 齊藤宣一, 柏原崇人, 周冠宇: 数学教授にでも使える Freefem++ [日本応用数理学会・応用数理セミナー (2018 年 12 月 26 日) 資料] <http://www.infsup.jp/saito/ns/notes.html> を勉強して, 下に示す 3 つの形の領域を定義し (大きさは自分で適当に設定せよ), その上で,  $f(x, y)$  も適当に設定し, Poisson 方程式の境界値問題を解け. Freefem++ のソースコードと, 可視化の結果を報告せよ.

